

Formeln Scuba Diving

Stickstoff (N₂), Sauerstoff (O₂), Kohlendioxid (CO₂), Argon (Ar), Helium (He), ...

Index t (Index _i) tissue = Gewebe, eigentlich ist kein echtes Körpergewebe gemeint sondern ein Kompartiment

Index amb (index _{amb}) ambient = Umgebung

Zusammenhang zwischen den Teildrücken der einzelnen Gassorten und dem Gesamtdruck
 $P_{amb} = P$, (Gesetz von Dalton):

$$P = \sum p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \dots$$

Für Luft auf Meereshöhe demnach in etwa:

$$P = \sum p_i = p_{O_2} + p_{N_2} + p_{Rest} = 1 \text{ Bar (ca.)}$$

Zur Berechnung der Partial-(=Teil)drücke benutzen wir die Volumenanteile f (= fraction) eines jeden Gases:

$$p_i = P_{amb} * f_i$$

Damit werden beispielsweise (ca.):

$$p_{O_2} = 1 \text{ Bar} * 0,2$$

$$p_{N_2} = 1 \text{ Bar} * 0,8$$

Längeneinheiten

Da wir es in der englischsprachigen Literatur viel mit imperialen Quellen zu tun haben, hier folgende Konversionsfaktoren:

$$1 \text{ m} = 1,094 \text{ yard} = 3,28 \text{ feet} = 39,37 \text{ inches}$$

$$1 \text{ foot} = 0,3048 \text{ m} = 12 \text{ inch}$$

$$1 \text{ inch} = 2,54 \text{ cm}$$

$$1 \text{ fathom} = 6 \text{ ft} = 2 \text{ yard}$$

$$3 \text{ feet} = 1 \text{ yard} = 0,91439 \text{ m}$$

$$1760 \text{ yard} = 1 \text{ mile}$$

$$1 \text{ km} = 0,62 \text{ mile}$$

Geschwindigkeit

$$1 \text{ knot (Knoten)} = 1,15 \text{ miles / hour} = \text{ca. } 51,48 \text{ cm / sec} = \text{ca. } 2,13 \text{ km / h}$$

Volumeneinheiten

1 Kubikmeter (m³) = 35.31 cubic feet (ft³)

1 L = 0,04 ft³

1 ft.³ = 28,317 L

Druckeinheiten

1 Bar = 10⁵ Pascal (Pa) (1 Pa = 1 N / m²) = 14,5038 psi

1 Bar = 10 msw = 100 kPa

1 Atmosphäre (atm) = 760 mm Hg (Torr) = 10,080 Meter Seewasser (msw) = 10,33227 m WS =

33,071 feet sea water (fsw) = 33,8995 feet fresh water = 14,6960 psi

1 fsw = 0,3064 msw

1 msw = 3,2633 fsw

1 fsw = 0,0306391 Bar

1 foot of pure water = 0,0298898 Bar

1 Atmosphäre (atm) = 1,03323 kg/cm² (bzw.: 1.033,23 cm H₂O) = 1,01325 Bar (= 1013,25 mbar) =

760 Torr (mmHg) = 101,325 Kilopascal (kPa)

d.h.: 1 fsw = 22,9809 mm Hg, also 1 Wdh-Gr der USN Tabelle entspricht ca. 37 mm Hg

1 psi = 0,0689474 Bar

zwischen der Tauchtiefe d (in einer Druckeinheit gemessen, z.B. [bar] oder [fsw]) und absolutem Druck (ambient pressure) P_{amb} und dem Umgebungsdruck auf Meereshöhe (p₀) gilt der Zusammenhang:

$$P_{amb} = p_0 + d$$

bzw. ganz allgemein:

$$P_{amb} = p_0 + d * const.$$

Die Konstante const. dient zur Umrechnung einer Längenangabe (Tauchtiefe) in eine Druckeinheit

Wird die Tauchtiefe d in [m] angegeben, gilt deshalb in etwa folgender Zusammenhang für den Druck in [Bar]:

const. = 0,0980665 [Bar/m], für Süßwasser, und

const. = 0,100522 [Bar/m], für Salzwasser, und damit z.B.:

$$P_{amb} = p_0 + d / 10,197 \text{ bzw. } P_{amb} = p_0 + d / 9,948$$

Allgemeines

Die Aufnahme und die Abgabe von Inertgasen aus einem System heraus, welches mit diesem Gas nicht im Zustand der Sättigung ist, es also kein Gleichgewicht der Partialdrücke inner- und ausserhalb des Systems gibt, lässt sich durch eine Differentialgleichung beschreiben:

$$dP_t(t)/dt = k[P_{alv}(t) - P_t(t)] \quad (1a)$$

Anschaulich lässt sich diese DGL so erklären: die zeitliche Druckänderung $dP_t(t)/dt$ in einem Kompartiment ist abhängig vom im Moment wirkenden Druckgradienten ΔP . Die Grundidee sieht also mathematisch ganz einfach so aus: $\partial P / \partial t \sim \Delta P$. Aus dieser Proportionalität macht man durch eine Konstante eine richtige Gleichung und aus den ∂ s werden dann die Differentiale gebildet: $dP(t)/dt = k * \Delta P$

Hierbei gilt die zentrale Idee aller sogenannten **Perfusionsmodelle**:

der Druckausgleich der Inertgase zwischen der Lunge und den Arterien erfolgt instantan!

D.h.: $P_{alv}(t) = P_{arteriell}(t)$, für alle t

Variable	Definition
$P_t(t)$	Partialdruck des Inertgases in einem Kompartiment zum Zeitpunkt t , in [Bar]
$P_{alv}(t)$	Partialdruck des Inertgases in den Alveolen [Bar]
k	eine Konstante, vom jeweiligen Kompartiment abhängig [min^{-1}]
t	Zeit (also Tauchzeit) [min]

Schritt 1: Wir trennen die Variablen in (1a) und finden die inhomogene Differential Gleichung (1b):

$$dP_t(t)/dt + kP_t(t) = kP_{alv}(t) \quad (1b)$$

Schritt 2: Die homogene Gleichung (2):

$$dP_{th}(t)/dt + kP_{th}(t) = 0 \quad (2)$$

wird mittels des folgenden Ansatzes gelöst: $P_{th}(t) = C_0 e^{-\lambda t}$

Das 'h' in P_{th} bedeutet, daß die homogene Gleichung gemeint ist. Setzen wir diesen Ansatz in (2) ein, so erhalten wir:

$$-\lambda C_0 e^{-\lambda t} + k C_0 e^{-\lambda t} = 0 \Rightarrow (k - \lambda) C_0 e^{-\lambda t} = 0,$$

nur wenn $k = \lambda$ oder $C_0 = 0$ (uninteressant: dies bedeutet keine Druckveränderung, also kein Tauchgang),

und da $e^{-\lambda t} \neq 0$ für alle t , nehmen wir also $k = \lambda$ und erhalten somit die homogene Lösung von (2):

$$P_{th}(t) = C_0 e^{-kt}. \quad (3)$$

Schritt 3: Finde die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (1b) mittels den Randbedingungen. Wir nehmen zwei spezielle Situationen bzgl. $P_{alv}(t)$ an.

1) $P_{alv}(t) = \text{const.}$, d.h. die Tiefe bleibt ebenfalls konstant!

2) $P_{alv}(t)$ variiert linear mit der Zeit, d.h. die Ab- und Aufstiegsrampen sind konstant, also Ab- bzw. Aufstiegseschwindigkeiten bleiben konstant.

Situation 1:

Konstante Tiefe = konstanter Umgebungsdruck

In diesem Falle wird auch der alveolare Inertgasdruck einen konstanten Wert annehmen: $P_{alv}(t) = P_{alv0}$. Dann wird die Gleichung (1b):

$$dP_t(t)/dt + kP_t(t) = kP_{alv0} \quad (4)$$

Wir nehmen die 'Lösung':

$$P_t(t) = C_0 e^{-kt} + C_1 \quad (5)$$

Wir setzen (5) in (4) ein und die Exponentialterme heben sich auf:

$$-kC_0 e^{-kt} + kC_0 e^{-kt} + kC_1 = kP_{alv0}$$

und wir erhalten: $C_1 = P_{alv0}$.

Wir suchen uns eine weitere sinnvolle Randbedingung um C_0 zu bestimmen. Es wird ein bestimmter, konstanter Anfangs-Partialdruck im Kompartiment angenommen: $P_t(0) = P_{t0}$ zum Zeitpunkt $t=0$. Dies bedeutet z.B. einen bestimmten, erreichten Sättigungsdruck oder auch den Startdruck beim Bergseetauchen. Das wird in Gleichung (5) eingesetzt:

$$P_{t0} = C_0 e^{-0} + P_{alv0}$$

daraus folgt dann: $C_0 = [P_{t0} - P_{alv0}]$. Es ergibt sich dann die **Haldane** Gleichung für den Partialdruck eines Inertgases in einem spezifischen Kompartiment k :

$$P_t(t) = P_{alv0} + [P_{t0} - P_{alv0}] e^{-kt} \quad (6a)$$

Variable

Definition

$P_t(t)$	Partialdruck eines Inertgases im Kompartiment mit der Konstanten k [Bar]
P_{t0}	Initialer Partialdruck des Inertgases im Kompartiment zum Zeitpunkt $t=0$ [Bar]
P_{alv0}	der konstante Partialdruck des Inertgases in den Alveoli [Bar], für $t = 0$ und damit für alle Zeiten wg. der Randbedingung
k	Eine Konstante, abhängig vom Kompartiment [min^{-1}]
t	Zeit [min]

(6a) ist die berühmte **Haldane Gleichung**, durch umformen kommen wir zu (6b);

wir addieren links und rechts einfach P_{t0} und ordnen nach $P_{alv0} - P_{t0}$ um:

$$P_t(t) = P_{t0} + [P_{alv0} - P_{t0}] [1 - e^{-kt}] \quad (6b)$$

Dies ist die allgemein zitierte Gleichung, z.B.:

Bühlmann, [4] S. 14, 1983; [5] S. 64, 1993; [65] S. 96, 2002, mit leicht geänderten Indizes. So ist z.B. P_1 der inspiratorische Inertgasdruck, d.h. R_q (siehe Gleichung (13)) wird somit implizit = 1 gesetzt, hierin unterscheiden sich die Deko-Modelle: siehe Kapitel "Handwerkszeug", Abschnitt "Respiratorischer Koeffizient". Bei [4] auf S. 60 erscheint dies noch deutlich in der Formelzusammenstellung.

Situation 2:

der Umgebungsdruck ändert sich linear mit der Zeit

Beim Ab- bzw. Auftauchen mit konstanter Geschwindigkeit ändert sich der inspiratorische Partialdruck des Inertgases linear mit der Zeit (beim SCUBA Tauchen! Bei einem Rebreather (CCR = closed circuit rebreather) gelten, je nach Bauart, andere Gesetze!). In Gleichung (1) bedeutet dies:

$$P_{alv}(t) = P_{alv0} + R \cdot t.$$

P_{alv0} ist der anfängliche Partialdruck des Inertgases zum Zeitpunkt $t=0$, und R ist die Änderungsrate (in Bar/minute) des Partialdrucks dieses Inertgases in den Alveolen. R ist positiv für den Abstieg (Druckzunahme) und negativ für den Aufstieg (Druckabnahme). Wird dies in Gleichung (1b) eingesetzt ergibt das:

$$dP_t(t)/dt + k P_t(t) = k P_{alv0} + k R t \quad (7)$$

Der Lösungsansatz lautet:

$$P_t(t) = C_0 e^{-kt} + C_1 t + C_2 \quad (8)$$

Die Lösung (8) wird in Gleichung (7) eingesetzt und ergibt zunächst:

$$-k C_0 e^{-kt} + C_1 + k C_0 e^{-kt} + k C_1 t + k C_2 = k P_{alv0} + k R t$$

und deshalb:

$$[k C_1 - k R] t + [C_1 + k C_2 - k P_{alv0}] = 0 \quad (9)$$

Um eine Lösung für C_1 und C_2 zu finden, die für alle Zeiten t gilt, setzen wir die Rechteck-Klammerterme in (9) gleich 0. Dies ergibt:

$C_1 = R$ und $C_2 = P_{alv0} - R/k$. Daher gilt:

$$P_t(t) = C_0 e^{-kt} + R t + P_{alv0} - R/k \quad (10)$$

Erneut wird die Randbedingung $P_t(0) = P_{t0}$ für $t=0$ benutzt um C_0 zu berechnen. Wird dies in (10) eingesetzt, folgt:

$$P_{t0} = C_0 e^{-0} + P_{alv0} - R/k$$

und so gilt: $C_0 = P_{t0} - P_{alv0} + R/k$. Als endgültige Lösung finden wir:

$$P_t(t) = P_{alv0} + R t - R/k + [P_{t0} - P_{alv0} + R/k] e^{-kt}$$

bzw.:

$$P_t(t) = P_{alv0} + R [t - 1/k] - [P_{alv0} - P_{t0} - R/k] e^{-kt} \quad (11)$$

Variable	Definition
$P_t(t)$	Partialdruck des Inertgases im Kompartiment [Bar]
P_{t0}	Initialer Partialdruck des Inertgases im Kompartiment zum Zeitpunkt $t=0$ [Bar]
P_{alv0}	Initialer (alveolarer) Partial Druck zum Zeitpunkt $t=0$ [Bar]
k	eine Konstante, vom Kompartiment abhängig
R	Änderungsrate des Partial Druckes des Inertgases in den Alveolen (Bar/min) $R = f * R_{amb}$, f ist der Volumen-Anteil des Inertgases und R_{amb} ist die Änderungsrate des Umgebungsdruckes
t	Zeit [min]

die sogenannte **Schreiner Gleichung**. Wird die Änderungsrate $R = 0$ gesetzt (bei konstanter Tauchtiefe) wird aus der Schreiner Gleichung (11) wieder die Haldanegleichung (6a).

Halbwertszeiten (HWZ)

Die Variable τ (Tau) wird als 'Halbwertszeit' (HWZ) bezeichnet und kennzeichnet die verschiedenen Kompartimente: $-k * \tau = \ln(1/2) = -\ln(2)$. Die Beziehung zwischen k und der HWZ ist:

$$\tau = \ln(2) / k \text{ bzw. } k = \ln(2) / \tau \quad (12)$$

Der streng physiologische Zusammenhang zwischen den HWZ und den Kompartimenten entsteht eigentlich durch die Fettlöslichkeit und der Perfusion (der Durchblutung):

$$\tau = 0,693 * \alpha_{ti} / (\alpha_{bl} * dQ/dt) \quad (12a)$$

wobei folgende Definitionen gelten:

$$\begin{aligned} \alpha_{ti} &= \text{Löslichkeit des Inertgases im Gewebe (tissue), } ml(S)_{gas} * ml_{ti}^{-1} * (100 \text{ kPa})^{-1} \\ \alpha_{bl} &= \text{Löslichkeit des Inertgases im Blut (blood), } ml(S)_{gas} * ml_{blood}^{-1} * (100 \text{ kPa})^{-1} \\ dQ/dt &= \text{Gewebsperfusion, } ml_{blood} * ml_{ti}^{-1} * \text{min}^{-1} \end{aligned}$$

Die Partialdrücke in den Lungenalveolen

Wir wollen den alveolaren Partialdruck P_{alv} genauer bestimmen. Die Gaszusammensetzung und damit die Partialdrücke der einzelnen Bestandteile sind abhängig vom Umgebungsdruck P_{amb} , Wasserdampf, Kohlendioxid und den Bestandteilen des Gasgemisches, also der chemischen Zusammensetzung des Atemgases.

Der Umgebungsdruck P_{amb} ist die Summe aus atmosphärischem Druck (ca. 1 Bar auf Meereshöhe) + statischem Druck der Wassersäule (Tiefe), er steigt um ca. 1 Bar mit je 10 m Tiefenzunahme. Der Umgebungsdruck und der absolute (Summe alle Partialdrücke) Druck in der Lunge müssen gleich gross sein: nur beim Ein- bzw. Ausatmen ergibt sich eine kleine Differenz von max. ca. 30 cm Wassersäule.

Der Partialdruck eines Inertgases in der Lunge P_{alv} lässt sich in etwa abschätzen durch:

- den Partialdruck (bedingt durch den Anteil f) des Inertgases in der Luft (Pressluft) oder im Atemgasgemisch
- den Wasserdampfpartialdruck P_{H_2O} . Die getrocknete Kompressorluft muss auf dem Weg zur Lunge in der Nase, Kehlkopf, den Tracheen und in diversen Schleimhäuten komplett befeuchtet werden. Somit wird das Atemgas verdünnt. Bei 37 Grad Celsius beträgt P_{H_2O} in gesättigter Umgebung ca. 0.0627 Bar (47 mm Hg)
- Sauerstoff O_2 wird durch den Gasaustausch aus der Lunge entnommen
- Kohlendioxid CO_2 wird durch den Gasaustausch hinzugefügt
- da CO_2 im normalen, sauberen Atemgas vernachlässigbar ist, wird der CO_2 Partialdruck in der Lunge gleich dem arteriellen CO_2 Partialdruck angesetzt mit: 0.0534 Bar (40 mm Hg).

Der Sauerstoffverbrauch und damit die Kohlendioxidproduktion wird angegeben durch den **respiratorischen Quotienten** R_q . R_q ist das Volumenverhältnis von Kohlendioxidproduktion zu Sauerstoffverbrauch, Durchschnittswerte sind: 200 ml Kohlendioxidproduktion / 250 ml Sauerstoffverbrauch pro Minute, d.h. ca.:

$$R_q = 200 / 250 = 0,8.$$

R_q hängt von der Ernährung sowie der Anstrengung ab: siehe Kapitel "Handwerkszeug"

Die Gleichung der **alveolaren Ventilation** beschreibt dies:

$$P_{alv} = [P_{amb} - P_{H_2O} - P_{CO_2} + \Delta P_{O_2}] * f$$

oder:

$$P_{alv} = [P_{amb} - P_{H_2O} + (1 - R_q)/R_q * P_{CO_2}] * f \quad (13)$$

Variable	Definition
P_{alv}	Partialdruck des Inertgases in den Alveoli [Bar]
P_{amb}	Umgebungsdruck, also Absolutdruck des Atemgases [Bar]
P_{H_2O}	Wasserdampfpartialdruck, bei 37 Grad Celsius ca. 0.0627 Bar (47 mm Hg)
P_{CO_2}	Kohlendioxidpartialdruck, ca. 0.0534 Bar (40 mm Hg)
ΔP_{O_2}	Delta = Änderung des Sauerstoffpartialdruckes durch den Gasaustausch in der Lunge
R_q	der respiratorische Quotient

f Anteil des Inertgases im Atemgas; Bsp.: N₂ in trockener Atemluft = ca. 0.78.
Üblicherweise wird zum Tauchen f = 0,79xx angesetzt, d.h.: es werden Spurengase etc. mitberücksichtigt

Kritische Übersättigungen, symptomlos tolerierte Inertgasüberdrücke, M-Werte

Definitionen siehe: Kapitel "Handwerkszeug"

Haldane Werte

2 : 1 für alle 5 Kompartimente, allerdings gilt das so nur für den absoluten Druck, bzgl. den Inertgasspannungen im Verhältnis zum Umgebungsdruck sieht dann das so aus:

$2 * 0,78 = 1,56$, also 1,56 : 1 (Workman)

und ist somit eine Konstante für alle Kompartimente.

Workman M-Werte

Die lineare Workman Gleichung, also eine einfache Geradengleichung für jedes Kompartiment sieht so aus:

$$M = M_0 + \Delta M * d \quad (14)$$

Variable	Definition
M	M-Wert, Maximaler Partialdruck des Inertgases im Kompartiment [fsw]
M ₀	M-Null Wert, für Meereshöhe, oder Tauchtiefe = 0 ft für jedes Kompartiment [fsw]
ΔM	Delta M, Zunahme für M pro foot Tauch-Tiefe, für jedes Kompartiment definiert [fsw/ft]
d	Tauchtiefe [ft]

Alle aktuellen Koeffizienten gibt es weiter unten in einer Tabelle. Workman lies die M-Werte abnehmen mit zunehmender Halbwertszeit, danach können schnelle Kompartimente einen höheren Inertgasüberdruck tolerieren als die langsamen.

Mit Gleichung (14) können wir die minimale Tiefe d_{\min} berechnen in der der Taucher während des Deko-Stopps bleiben sollte. Dies muss man für jedes Kompartiment machen und ist abhängig von der bisher erreichten Inertgasübersättigung:

$$d_{\min} = (P_t - M_0) / \Delta M \quad (15)$$

Da jedes Kompartiment eine andere Sättigung und somit auch andere Minimaltiefen aufweist, nehmen wir aus diesen Werten den grössten: es darf dann maximal bis zu dieser Tiefe aufgestiegen werden und keinesfalls weiter!

Für den Zusammenhang zwischen den M-Werten und der Halbwertszeit gilt folgender empirischer Zusammenhang lt. Workman:

$$M = 152,7 \tau^{-1/4} + 3,25 d \tau^{-1/4} = M_0 + \Delta M d \quad (16)$$

Für den Zusammenhang zwischen Nullzeiten t_{NDL} [min] und der Tauchtiefe d [fsw] gilt nach Hempleman in etwa:

$$d * t_{NDL}^{1/2} = 475 \text{ fsw min}^{1/2} \quad (16.1)$$

Der **PADI/DSAT RDP** wurde genau nach so einer Formel generiert, allerdings mit weiteren Anpassungen:

$$d - A = C * t_{NDL}^{-x} \quad (16.2)$$

- $A =$ "flache" Asymptote, 20,13 fsw
- $C = 803$
- $x = 0,7476$
- "tiefe" Asymptote = 262 fsw (theoretische Tauchtiefe mit $NDL = 0!$)

Die Bühlmann-Hahn Modelle

Bühlmann bietet ebenfalls wie Workman, eine lineare Beziehung zwischen Übersättigung und Umgebungsdruck an ([65], S. 117):

$$P_{\text{tol.ig}} = P_{\text{amb}} / b + a \quad (17)$$

Variable	Definition
$P_{\text{tol.ig}}$	tolerierter Inertgasdruck, für jedes Kompartiment, (analog M) [Bar], Summe aller Partialdrücke der inerten Atemgase
a	Grenzwert bei einem theoretischen Umgebungsdruck von 0 Bar, d.h. der Achsenabschnitt [Bar]
P_{amb}	Umgebungsdruck, absoluter Druck der Atemgase [Bar]
b	1/b Druckgradient: Wert der Zunahme pro Druckeinheit Tiefe (dimensionslos), d.h. die Steigung der Geraden

Der Unterschied in den Definitionen liegt lediglich darin, dass Workman die M-Werte auf Umgebungsdruck beim Tauchen bezogen auf Meereshöhe angibt und Bühlmann gegen 0 Bar Umgebungsdruck extrapoliert (und damit den Bereich zwischen 1 und 0 Bar für Bergseetauchen automatisch erschließt!). Beide Definitionen kann man ineinander umrechnen:

$$\begin{aligned} P_{\text{tol.ig}} &= M \\ \Delta M &= \text{const.} * 1/b \\ M_0 &= a + p_0/b \end{aligned} \quad (18)$$

Für die a- und b- Koeffizienten benutzte Bühlmann die folgende empirische Relation in Abhängigkeit von der Halbwertszeit τ . Diese gelten so nur für Stickstoff ([65], S. 129)! Für Helium sieht diese Relation etwas anders aus ... (siehe [65], S. 131).

$$\begin{aligned}
 a &= 2 \text{ Bar} * \tau^{-1/3} \\
 b &= 1.005 - \tau^{-1/2}
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Dies ist der sogenannte "A"-Koeffizienten Satz, weiterhin gibt es einen "B" (konservativer, für Tabellen) und einen "C" Satz (für Tauchcomputerberechnungen) von Koeffizienten (Tabellen hierzu: siehe weiter unten resp. [65], S. 158).

Das Verhältnis zwischen zwei aufeinanderfolgenden HWZs ist in etwa 1,2 bis 1,4. Dies entspricht nicht etwa einem physiologischen Gesetz, sondern lediglich dem Wunsch, ein enges Netz von HWZs zu stricken. Lediglich die ganz schnellen und ganz langsamen Kompartimente, also die HWZs 4 - 8 und 400 - 720 min. entsprechen direkt Ergebnissen medizinischer Überlegungen. Nichtsdestotrotz wird auf S. 115 [65] die Identifikation der Kompartimente mit echten Körpergeweben unternommen:

- Nr. 1 - 4: Gehirn und Rückenmark
- Nr. 5 - 11: Haut
- Nr. 9 - 12: Muskulatur
- Nr. 13 - 16: Gelenke, Knorpel, Knochen
- Nr. 7 - 16: Innenöhrchen

Die dritte Wurzel zur Ableitung von a gibt wohl einen Hinweis auf das damit verbundene tolerierte "Überschussvolumen" an Inertgas.

Die etwas griffigere Formulierung von (17) sieht so aus:

$$P_{\text{amb, tol}} = (P_{\text{t, ig}} - a) * b
 \tag{17 a}$$

Andere Perfusionsmodelle

DCAP (Decompression Computation and Analysis Program) benutzt die M11F6 M-Werte, die Bill Hamilton für die Schwedische Navy entwickelt hatte. Diese werden oft für Mischgase eingesetzt.

Die 11 HWZ für Stickstoff waren von 5 - 670 min., damit die für Helium: 5 - 240 min.

Der **PADI RDP™** Koeffizienten Satz benutzt die 14 M-Werte, die von Raymond E. Rogers und Michael R. Powell, Diving Science and Technology Corp (DSAT), entwickelt wurden. Mit diesem Modell, ihr wißt es, können nur NDLS berechnet werden, es ist **nicht für Deko-TGs validiert worden (und auch nicht für Bergsee-TG)!**

Diffusionsmodelle

Das **RNPL SLAB** Modell:

RNPL ist das "Royal Naval Physiological Laboratory" of Her Majesty, the Queen. Slab = Scheibe, Platte.

Hieraus haben sich die BLACKPOOL Tabellen für Caisson-Arbeiter und dann die BSAC 1988 Tabellen entwickelt.

$$\begin{aligned}
 P_1 &= P_{\text{ambient}} - 8 / \pi^2 * (P_{\text{ambient}} - P_0) * (e^{-k*t} + 1/9 * e^{-9*k*t} + 1/25 * e^{-25*k*t}) \\
 r &= 27,5714 / P_1 + 12,407 \\
 r &= \text{Supersaturation Ratio, } 1,6 < r < 1,9 \\
 P_1 &\text{ in Bar} \\
 k &= 0,007928
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Dies ist eine spezielle Lösung des zweiten Fick'schen Gesetzes. Für den Diffusionskoeffizienten D gilt damit:
 $k = D * \pi^2 / 4 * b^2$, b ist die Dicke der Scheibe.

Das **DCIEM Kidd-Stubbs** Modell:

DCIEM = Defence and Civil Institute of Environmental Medicine, Canada:

Bei diesem Modell sind **4 Kompartimente in Serie geschaltet**, $i = 1 - 5$.

Dies Modell ist das Kidd-Stubbs Modell von 1962 bzw. KS-1971.

Hieraus wurden dann die DCIEM Tables 1983 (R.Y. Nishi und G.R. Lauckner) entwickelt.

$$dP_i / dt = A * ((B + P_{i-1} + P_i) * (P_{i-1} - P_i) - (B + P_i + P_{i+1})(P_i - P_{i+1}))$$

mit: $P_0 = P_{\text{ambient}}$

und: $P_i = P$ im Kompartiment i

und: $P_5 = 0$

$A = 0,0002596$

$B = 83,67$

A und B sind die sogenannten "Fluss Konstanten" für Luft, in msw

Die HWZ selber sind mittels der A - und B -Koeffizienten definiert und druck- bzw. zeitabhängig.

Die Asymmetrie zwischen Inertgasaufnahme (schneller) und- abgabe (langsamer) kommt hier zum Ausdruck:

$$T_{1/2} = (\ln(2 - \Delta P / (B + P_i + P_f))) / (A(B + 2P_f))$$

mit: P_i initialer Druck

mit: P_f finaler Druck

$\Delta P = P_f - P_i$

mit: $SAD = \text{Safe Ascent Depth}$

$SAD = P_{\text{max, Komp.i}} / 1,8 - 10,06$

für die DCIEM Tabelle gilt jedoch folgendes:

$SAD = P_{\text{max, Komp.i}} / R - \text{OFF} - P_{\text{sealevel}}$

$i = 1$, $R = 1,300$ und $\text{OFF} = 4,8$

$i = 2$, $R = 1,385$ und $\text{OFF} = 2,5$

$P_{\text{sealevel}} = 10,06$ msw

und $i = 3; 4; 1/R = 0,0$ sowie $\text{OFF} = 0,0$

(21)

Stopp-Zeiten, Nullzeiten (= no decompression limits), Zeit bis Flug etc.

Wir nehmen Gleichung (6a) und formen diese etwas um:

$$e^{-k * t} = [(P_t(t) - P_{\text{alv0}}) / (P_{t0} - P_{\text{alv0}})] \quad (22)$$

Der Bruch sei der Term in der eckigen Klammer [...]. Die Gleichung wird logarithmiert:

$$\ln[...] = \ln(e^{-k * t}) = -k * t$$

wir lösen nach t auf:

$$t = - 1 / k * \ln [\dots]$$

und aus (12) mit $k = \ln(2) / \tau$ ergeben sich die gefragten Zeiten zu:

$$t = - \tau / \ln 2 * \ln [(P_t(t) - P_{alv0}) / (P_{t0} - P_{alv0})] \quad (23)$$

Mit (23) und sinnvollen Annahmen für die einzelnen Druckterme können wir jetzt berechnen:

- die NDLS mittels (17) und $P_{amb} = 1$ Bar
- die Zeit bis Flug (Flugverbotszeit), wenn bei (17) der Kabinendruck im Flieger $P_{cabin} = 0,58$ Bar = P_{amb} gesetzt wird.
Dies ist wohl die unterste Grenze, normalerweise herrscht in der Kabine ein Druck von etwa 0,8 Bar.
- die Entsättigungszeit, wenn eine gewisse mathematische Unschärfe eingeführt wird: $P_t(t) = P_{N2} + \Delta$, wobei Δ eine kleine Zahl sein kann, sonst schneiden sich die Gerade mit dem konstanten $P = P_{N2}$ und die Exponentialkurve der Entsättigung $P = P_t(t)$ erst im Unendlichen, und das wäre etwas zu lange für einen Tauchurlaub ...
Völlm schlägt in [65], S. 216, vor, die Grenze auf die Tages-Schwankungen des Luftdruckes zu setzen, also ca. ± 30 mbar.
- die Zeiten auf den allfälligen Deko-Stops
- (23) kann auch für Mischgase benutzt werden, wenn sinnvolle Annahmen über die die a- und b- Koeffizienten gemacht werden.

Für Mischgase bietet Bühlmann folgendes an ([65], S. 119):

$$P_t(t) = P_{t, He}(t) + P_{t, N2}(t)$$

wobei die a- und b- Koeffizienten gemäss den Partialdrücken in jedem Kompartiment normiert werden sollen (siehe auch dazu die Bemerkung in [54] auf S. 86):

Es gilt somit für jede Kombination von a- & b-Werten für jedes Kompartiment zu jedem Zeitpunkt t:

$$\begin{aligned} a(He + N_2) &= [(P_{t, He} * a_{He}) + (P_{t, N2} * a_{N2})] / (P_{t, He} + P_{t, N2}) \\ b(He + N_2) &= [(P_{t, He} * b_{He}) + (P_{t, N2} * b_{N2})] / (P_{t, He} + P_{t, N2}) \end{aligned} \quad (24)$$

Siehe dazu auch die Beispiele in [4], S. 27 sowie [5], S. 80.

Gradienten Faktoren / Gradient Factors (GF) / VGM (Variable Gradient Method)

Die a- und b-Koeffizienten werden mit den GF verziert:

$$a \rightarrow a * GF \text{ sowie } b \rightarrow b / (GF - GF * b + b) \quad (25.a)$$

Für alle GF pro Kompartiment gilt: $0 < GF \leq 1$
wenn konservativer gerechnet werden soll.
Bei **aggressiver** Rechenweise werden die **GF > 1** gesetzt.

Die meisten Desktop Deko-Softwares erlauben die Eingabe von 2 Gradientenfaktoren: GF Hi und GF Lo.

GF Hi (= High) bedeutet die Reduktion des führenden M-Wertes (oder des a- & b Wertepaares) und erzeugt so einen längeren letzten, flachen Stopp.

GF Lo (= Low) erzeugt einen tieferen, ersten Stopp.

Über eine lineare Funktion kann man die Gradientenfaktoren über alle Austauschstufen benutzen:

mit: **GF Hi > GF Lo**

$$\begin{aligned} GF_m &= (GF_{Hi} - GF_{Lo}) / \text{erste Stopptiefe} & (25.b) \\ GF &= GF_{Hi} - GF_m * \text{aktuelle Stopptiefe} &) \end{aligned}$$

Bei der **VGM (Variable Gradient Method)** kann man, statt nur ein GF-Paar für die komplette Schar aller Kompartimente, für jedes Kompartiment gezielt einen GF Hi / GF Lo angeben.

VPM (Varying-Permeability Model)

Hauptquelle:

Yount DE, Hoffman DC. On the use of a bubble formation model to calculate diving tables. Aviat. Space Environ. Med. 1986; 57: 149 - 156.

Weitere Quellen im ["deco manual"](#)

$$r_1^{\min} = 1 / [(1/r_0^{\min}) + (P_1 - P_0) / 2 * (\gamma_c - \gamma)]$$

$$r(t_r) = r_1^{\min} + (r_0^{\min} - r_1^{\min}) * [1 - \exp(-t_r / \tau_r)]$$

$$P_{ss}^{\min} = 2 * (\gamma / \gamma_c) * (\gamma_c - \gamma) / r(t_r)$$

$$P_{ss}^{\text{new}} = [b + (b^2 - 4 * c)^{1/2}] / 2$$

mit:

$$b = P_{ss}^{\min} + \lambda * \gamma / [\gamma_c * (t_D + H / \ln(2))]$$

$$c = (\gamma / \gamma_c)^2 * \lambda * (P_1 - P_0) / (t_D + H / \ln(2))$$

(Eq. 1 ->
4c)
ebd., S. (26)
150 - 151

Die 5 "freien" Parameter wurden über Anpassungen der TTS (time-to-surface) aus den USN- und den RNPL-Tabellen gewonnen:

$$\gamma_c = 257 \text{ dyn / cm (= mN/m)} \quad (\text{ebd.: S. 151 \& (27)})$$

$\gamma = 17,9 \text{ dyn / cm (= mN/m)}$
 $r_0^{\text{min}} = 0,8 \text{ }\mu\text{m}$
 $\tau_r = 20160 \text{ min (= 14 Tage)}$
 $\lambda = 7500 \text{ feet * min (ca. 227,3 Bar * min)}$

155)

RGBM über ZH-L gefaltet / RGBM folded over ZH-L

Wienke bietet ein einfaches Verfahren an, ([31], S. 79 - 80; sowie [71], S. 33 - 40) wie die Ergebnisse aus den RGBM Modellen über ein bestehendes ZHL-Modell gefaltet werden können: es werden lediglich die a-, b-Koeffizienten linear skaliert.

Bezeichnungen hierfür:

tiny RGBM (tiny = winzig)

modified RGBM (modified = verändert, angepasst)

recreational RGBM (recreational = für Sporttaucher)

Haldane-imbedded (in die Haldane Theorie eingebettet)

Dies Modell ist in allen RGBM-Simulatoren zu finden wie:

GAP, ABYSS, etc.-Softwares sowie in MARES und SUUNTO Computern.

Dies wird mittels den sogenannten "**reduction factors**" **f** bewerkstelligt. Im Klartext werden die 16 Kompartimente und die dazugehörigen HWZ sowie die zentrale Gleichung (17) weiter benutzt.

Mit diesen f ($f < 1$) wird aus (17):

$$P_{\text{min}} = (p - a_f) * b_f$$

wobei:

$$a_f = a * f$$

und:

$$b_f = b / f * (1 - b) + b$$

(28)

f hängt von der HWZ ab und wird nur bei Luft/Nitrox für $\text{HWZ} > 180 \text{ min.}$ definiert.

(Bemerkung:

Bei genauem Hinsehen ist dies mit (25.a) identisch)

Desweiteren sollen genau diejenigen Faktoren eingehen, die eben im ZHL Modell bisher nicht berücksichtigt sind:

$$f = (1 - f_0) * \tau / 180 + f_0$$

wobei:

$$f < 1$$

und:

$$\tau > 180 \text{ min.}$$

(29)

Für die Faktoren: Wdh-TGs (rp), reversed Profiles (dp) und Mehrtages-Non-Limit Tauchen (dy) wird für f_0 folgendes angesetzt:

$$f_0 = 0,45 * f_{rp} + 0,30 * f_{dp} + 0,25 * f_{dy} \quad (30)$$

Es bedeutet:

rp = repetitive (Wdh-TG)

dp = deeper than previous (reversed Profil), also flacher TG zuerst

dy = multiday, Mehrtages-Tauchen, Zeitraum länger als 30 h

Für die einzelnen Faktoren gelten Abhängigkeiten:

$$\begin{aligned} f_{rp} &= 1 - 0,45 \exp \left[- (t_{sur} - \eta_{rp})^2 / 4 * \eta_{rp}^2 \right] \\ f_{dp} &= 1 - 0,45 * [1 - \exp (- \Delta P_{max} / P_{max})] * \exp \left[- (t_{sur} - \eta_{dp})^2 / 4 * \eta_{dp}^2 \right] \\ f_{dy} &= 0,70 + 0,30 \exp (- n / \eta_{dy}) \end{aligned} \quad (31)$$

Variable	Definition
10 min. < η_{rp} < 90 min.	
30 min. < η_{dp} < 120 min.	
12 h. < η_{dy} < 18 h.	
t_{sur}	OFP in [min.]
ΔP_{max}	maximale Druckdifferenz bei reversed Profiles
P_{max}	maximaler Umgebungsdruck
n	1. Mehrtages-Tauchfrequenz innerhalb 24 h, S.36 2. Anzahl der Tauch-Tage innerhalb 30 h, S. 37

(Bemerkungen:

1) der Faktor bei f_{dy} schwankt irgendwie zwischen 0,25 und 1,0 ...(S. 36)

2) n ist offenbar nicht stabil definiert, desweiteren passen die Einheiten (1/Zeit oder dimensionslos)

nicht zur Einheit von η

3) auch über die Zeit und die diversen Bücher ändern sich die Definitionen ganz leicht und inkompatibel ...

in [31] von 1998, [71] von 2003 sowie in "Diving Physics with Bubble Mechanics and Decompression Theory in depth" von 2008

!!!)

Für Helium gilt analog:

$$f = (1 - f_0) * \tau / 67,8 + f_0$$

wobei:

$$f < 1$$

und:

$$\tau > 67,8 \text{ min.} \quad (32)$$

Bei Trimix gilt entsprechend für die einzelnen Partialdrücke: $f_{O_2} + f_{N_2} + f_{He} = 1$.

Für den gesamten Inertgasdruck Π in den Kompartimenten gilt:

$$\Pi = (P_{\text{amb, N}_2} + P_{\text{amb, He}}) + (P_{\text{t, N}_2} - P_{\text{amb, N}_2}) * e^{(-k_{\text{N}_2} * t)} + (P_{\text{t, He}} - P_{\text{amb, He}}) * e^{(-k_{\text{He}} * t)}$$

wobei jetzt allerdings die mit den Anteilen f am Atemgas gewichteten Faktoren a_{f, N_2} und $a_{f, \text{He}}$ sowie b_{f, N_2} und $b_{f, \text{He}}$ zur Berechnung der kritischen A, B - Koeffizienten für das Trimix benutzt werden:

$$A_f = (f_{\text{N}_2} * a_{f, \text{N}_2} + f_{\text{He}} * a_{f, \text{He}}) / (f_{\text{N}_2} + f_{\text{He}})$$

sowie: (33)

$$B_f = (f_{\text{N}_2} * b_{f, \text{N}_2} + f_{\text{He}} * b_{f, \text{He}}) / (f_{\text{N}_2} + f_{\text{He}})$$

und somit der kritische Druck:

$$P_{\text{min}} = (\Pi - A_f) * B_f$$

(Bemerkung:

- 1) die Formel für Π auf S. 39 ist falsch, hier bei uns aber korrigiert!
- 2) Π wird somit anders berechnet wie (24). Es ist fraglich, was bei einem Wechsel auf reinen Sauerstoff in der Deko passiert:
die Anteile von He und N_2 werden identisch 0 im Atemgas, somit würden $A_f = 0$ und auch $B_f = 0$ und damit würde auch $P_{\text{min}} = 0 \dots$)

Für die inhärente Untersättigung, (Sauerstoff-Fenster v) gibt Wienke folgendes an;

v [fsw];, $P = P_{\text{amb}} = P_{\text{absolut}}$ [fsw], f_{O_2} Sauerstoffanteil

$$v = f_{\text{O}_2} * P - 2,04 * (1 - f_{\text{O}_2}) - 5,47 \tag{34}$$

(Bemerkung:

Das Oxygen Window ist aber nicht-linear, es erreicht seine grösste Öffnung bei ca. 1600 mm Hg!)

Zusammenhang zwischen k und den Kompartimenten

Aus (12) gilt ja folgendes, zunächst einmal rein mathematisch: $\tau = \ln(2) / k$ bzw.: $k = \ln(2) / \tau$

Wie ist nun der Zusammenhang zwischen k und den Kompartimenten, d.h. den unterschiedlichen Perfusionsraten und den unterschiedlichen Löslichkeiten?

Eine einfache Massenbilanz für ein Inertgas in einem ausschliesslich durch Perfusion versorgtem Gewebe sieht so aus:

$$N_{2\text{gespeichert}} = N_{2\text{rein}} - N_{2\text{raus}} \tag{35}$$

Das Inertgas wird mit arteriellem Blut zum Gewebe transportiert und verlässt diesen Bereich mit dem venösen Blut.

Hierbei wird angenommen, dass der arterielle (pN_a) und der alveolare Inertgaspartialdruck (pN_A) gleich sind, und dass

die Diffusion zwischen nahe aneinander gelegenen Kapillaren instantan erfolgt, d.h.: auch der venöse (pN_v) und der Gewebepartialdruck (pN_t) sollen für dieses Inertgas gleich sein.

Die Löslichkeitskoeffizienten des Inertgases für Blut (b) und Gewebe (t) sind: α_b sowie α_t . Q ist der Blutfluss, V_t ist das Gewebevolumen. Beginnend zur Zeit $t = 0$ wird vorausgesetzt, dass pN_a sofort mit einem konstanten Wert, p_a , gleichgesetzt wird. Die Änderungsrate des Gewebedrucks bestimmt die Rate mit der ein Inertgas im Gewebe gespeichert wird. Die kleine Skizze unten mag helfen: deshalb gilt zunächst:

$$\alpha_t * V_t * dp_t/dt = \alpha_b * dQ/dt * pN_a - \alpha_b * dQ/dt * pN_v \quad (36)$$

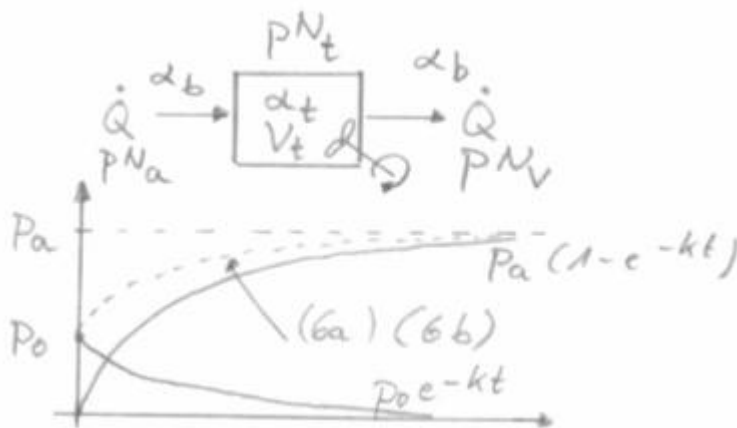
$$\text{mit: } dp_t/dt + k * p_t = k * p_a$$

$$\text{sowie: } k = \alpha_b * dQ/dt / (\alpha_t * V_t)$$

Die Lösung von (36) ist ja entweder (6a) bzw. (6b). Damit gilt letztendes ein Zusammenhang zwischen der HWZ und der Gewebepfusion und den Löslichkeiten wie folgt:

$$\tau = 0,693 / k = 0,693 / (\alpha_b * dQ/dt / \alpha_t * V_t) \quad (37)$$

Der Gewebdruck über der Zeit ($p_t(t)$) ist die Summe aus der Abnahme von p_0 und dem Anstieg des alveolaren Drucks pN_A :



Der kleine Rührer soll andeuten, dass es sich um ein "well stirred" (gut vermishtes) Kompartiment handelt.

VVAL18 LEM Modell

Bei der Revision 6 von 04/2008 der USN Tabelle wurde das Haldane/Workman EE Modell auf ein LE- bzw. LEM Modell umgebaut.

Zunächst wird der arterielle Inertgaspartialdruck p_a korrigiert:

$$p_{a,N_2} = P_{amb} - P_{I,O_2} - 1,5 \quad (38)$$

p_{a,N_2} = arterieller Inertgaspartialdruck

P_{amb} = absoluter Umgebungsdruck

P_{I,O_2} = inspiratorischer Sauerstoffpartialdruck (in FSW)

1,5 = arterieller CO_2 Partialdruck in FSW (35 mmHg)

Der Wasserdampfpartialdruck wird zunächst ignoriert.

Ausgehend von Gleichung (6a) wird für die Entsättigung ein linearer Verlauf vorgeschrieben. Diese lineare Entsättigung wird bis zum "**exponential cross over point**" berechnet, danach geht es wie bisher exponentiell weiter.

Ist zu irgendeinem Zeitpunkt in irgendeinem Kompartiment während der Entsättigungsphase der Inertgaspartialdruck grösser wie der Umgebungsdruck wird gilt folgende lineare Gleichung:

$$p_{T,N_2} = P_{Ti,N_2} + (2,8 - P_{I,O_2}) * K * T \quad (39)$$

p_{T,N_2} = Inertgaspartialdruck im Kompartiment zur Zeit T

P_{Ti,N_2} = initialer Inertgaspartialdruck im Kompartiment

T = Zeit auf aktueller Tiefenstufe

2,8 = Summe aus venösem O_2 (46 mmHg) und CO_2 (53 mmHg) minus arteriellem CO_2 (35 mmHg) = 64 mmHg in FSW

Gleichung (39) wird benutzt, wenn gilt:

$$p_{T,N_2} \geq P_{amb} - 4,3 \quad (40)$$

Wobei die 4,3 = Summe aus venösem O_2 und CO_2 in FSW (=99 mmHg) ist.

Die Kriterien für einen "sicheren Aufstieg" (safe ascend) werden nun statt M-Werten:

MPTT = Maximum Permissible Tissue Tensions genannt. Die Werte hierfür findet ihr hier im

Koeffiziententeil der Formelsammlung.

Die Kalibrierung für Mischgase sowie die Anpassungen über das NMRI Model werden mittels den weiteren Blutgas-Parametern bewerkstelligt.